1 Probabilidad

Problemas

1. El sexo en las tortugas, como en la mayoría de los reptiles, no está predeterminado genéticamente, sino que depende de la temperatura media de la incubación. Los huevos se incuban gracias al calor que se acumula en la arena que los cubre. A una temperatura moderada la mitad de las crías que nacen son hembras y la otra mitad machos. Si la temperatura es alta la proporción de hembras es del 80 %, y si es baja esta proporción se invierte, con un 80 % de machos. Se estima que a lo largo del año, un 25 % de los nidos se incuban a temperatura alta, un 60 % a temperatura moderada, y el restante 15 % a temperatura baja .

   a) Se han sacado 2 huevos de un nido incubado a temperatura moderada. ¿Cuál es la probabilidad de que las crías sean ambas machos? ¿Y de que sean ambas hembras? ¿Y de que sea una hembra y la otra macho?

Solución:
Sea S_i el sexo de la cría en el huevo i (con $i = 1, 2$). Llamemos asimismo T_M al suceso "*el nido se ha incubado a temperatura Moderada*". Dado que el sexo de la cría en cada huevo es independiente del sexo de las crías en los restantes huevos, la probabilidad de que dos huevos incubados a temperatura moderada den lugar a machos sería:

$$P(\{S_1 = M\} \cap \{S_2 = M\} | T_M) = P(S_1 = M | T_M) \cdot P(S_2 = M | T_M) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

Del mismo modo, la probabilidad de que ambos huevos den lugar a hembras es:

$$P(\{S_1 = H\} \cap \{S_2 = H\} | T_M) = P(S_1 = H | T_M) \cdot P(S_2 = H | T_M) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

Para calcular la probabilidad de que una cría sea macho y otra hembra hemos de tener en cuenta que este suceso puede ocurrir de dos formas: que el primer huevo sea macho y el segundo hembra, o que el primero sea hembra y el segundo macho. Por tanto:

$$\begin{aligned}
& P(\text{un macho y una hembra}) = \\
= \;& P(\{S_1 = M\} \cap \{S_2 = H\} | T_M) + P(\{S_1 = H\} \cap \{S_2 = M\} | T_M) = \\
= \;& P(S_1 = M | T_M) \cdot P(S_2 = H | T_M) + P(S_1 = H | T_M) \cdot P(S_2 = M | T_M) = \\
= \;& 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5
\end{aligned}$$

b) Repetir la pregunta anterior si el nido se encontraba a temperatura alta.

Solución:
La solución es análoga, salvo ahora las probabilidades de cada sexo se modifican:

$$P(\{S_1 = M\} \cap \{S_2 = M\} | T_A) = P(S_1 = M | T_A) \cdot P(S_2 = M | T_A) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$

Del mismo modo, la probabilidad de que ambos huevos den lugar a hembras es:

$$P(\{S_1 = H\} \cap \{S_2 = H\} | T_A) = P(S_1 = H | T_A) \cdot P(S_2 = H | T_A) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

Para calcular la probabilidad de que una cría sea macho y otra hembra hemos de tener en cuenta que este suceso puede ocurrir de dos formas: que el primer huevo sea macho y el segundo hembra, o que el primero sea hembra y el segundo macho. Por tanto:

$$\begin{aligned} & P(\text{un macho y una hembra}) = \\ = \ & P(S_1 = M | T_A) \cdot P(S_2 = H | T_A) + P(S_1 = H | T_A) \cdot P(S_2 = M | T_{AM}) = \\ = \ & 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32 \end{aligned}$$

Tanto en este apartado como en el anterior podemos comprobar que

$$P(\text{2 Machos}) + P(\text{2 Hembras}) + P(\text{1 Macho y 1 Hembra}) = 1$$

(si no ocurriese así las probabilidades estarían mal calculadas).

c) Se han extraído 5 huevos de un nido, resultando 3 machos y 2 hembras. ¿Qué es más probable, que el nido se encontrase a temperatura moderada, a temperatura alta o a temperatura baja?

Solución:

Hemos de determinar cuál es la mayor de las probabilidades $P(T_A | 3M, 2H)$, $P(T_M | 3M, 2H)$ y $P(T_B | 3M, 2H)$. De acuerdo con el teorema de Bayes:

$$P(T_A | 3M, 2H) = \frac{P(3M, 2H | T_A) P(T_A)}{P(3M, 2H)}$$

$$P(T_M | 3M, 2H) = \frac{P(3M, 2H | T_M) P(T_M)}{P(3M, 2H)}$$

$$P(T_B|3M,2H) = \frac{P(3M,2H|T_B)\,P(T_B)}{P(3M,2H)}$$

siendo: $P(3M,2H) =$

$$= P(3M,2H|T_A)\,P(T_A) + P(3M,2H|T_M)\,P(T_M) + P(3M,2H|T_B)\,P(T_B)$$

Ahora, para calcular $P(3M,2H|T_A)$ hemos de tener en cuenta todas las formas en que en un nido con 5 huevos pueden ocurrir 3 Machos y 2 Hembras:

Huevo				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
M	M	M	H	H
M	M	H	M	H
M	H	M	M	H
H	M	M	M	H
M	M	H	H	M
M	H	M	H	M
H	M	M	H	M
M	H	H	M	M
H	M	H	M	M
H	H	M	M	M

Como vemos, hay tantas formas en que puede ocurrir este suceso como maneras hay de ordenar 3 letras M y 2 letras H. Tales ordenaciones corresponden al número de permutaciones de 5 objetos entre los cuales hay uno que se repite 3 veces y otro que se repite 2 veces, esto es,

$$PR_5^{2,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Ahora bien, cada posible ordenación tiene la misma probabilidad de ocurrir; por ejemplo:

$$P(MMMHH|T_A) = P(M|T_A)^3\,P(H|T_A)^2 = 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}00512$$

Por tanto, la probabilidad total de 3 Machos y 2 Hembras cuando el nido se incuba a temperatura alta es:

$$P(3M,2H|T_A) = \binom{5}{3} 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512$$

De modo análogo, para las temperaturas moderada y baja:

$$\begin{aligned} P(3M,2H|T_M) &= \binom{5}{3} 0{,}5^3 0{,}5^2 = 0{,}3125 \\ P(3M,2H|T_B) &= \binom{5}{3} 0{,}8^3 0{,}2 = 0{,}2048 \end{aligned}$$

La probabilidad total de 3 Machos y 2 Hembras es entonces: $P(3M, 2H) =$

$$\begin{aligned} &= P(3M, 2H\,|T_A)\,P(T_A) + P(3M, 2H\,|T_M)\,P(T_M) + P(3M, 2H\,|T_B)\,P(T_B) = \\ &= 0{,}0512 \cdot 0{,}25 + 0{,}3125 \cdot 0{,}6 + 0{,}2048 \cdot 0{,}15 = 0{,}23102 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(T_A\,|3M, 2H) = \frac{P(3M, 2H\,|T_A)\,P(T_A)}{P(3M, 2H)} = 0{,}055406$$

$$P(T_M\,|3M, 2H) = \frac{P(3M, 2H\,|T_M)\,P(T_M)}{P(3M, 2H)} = 0{,}81162$$

$$P(T_B\,|3M, 2H) = \frac{P(3M, 2H\,|T_B)\,P(T_B)}{P(3M, 2H)} = 0{,}13298$$

Así pues lo más probable, habiendo observado 3 Machos y 2 Hembras en 5 huevos, es que ese nido se hubiese incubado a temperatura moderada.

2. De un terrario con 60 tortugas, de las que 10 son machos y 50 hembras, se extraen al azar 5 ejemplares. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 sean hembras? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 1 macho? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un macho? (d) ¿Cuál es el número mínimo de ejemplares que habría que extraer para que la probabilidad de que haya al menos un macho sea superior al 20 %?

Solución:

a) Se puede aplicar la regla de Laplace:

$$P(5\,\text{Hembras}) = \frac{\text{Num. de Casos Favorables}}{\text{Num. de Casos Posibles}}$$

siendo los casos favorables los mismos que el número de formas de elegir, al azar y sin reemplazamiento, 5 tortugas de entre las 50 hembras, esto es, las combinaciones de 50 objetos tomados de 5 en 5:

$$C_{50}^{5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)!5!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \cancel{45!}}{\cancel{45!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2118760$$

Asimismo, los casos posibles son el número de formas de elegir, al azar y sin reemplazamiento 5 tortugas de entre el total de 60 en el terrario:

$$C_{60}^{5} = \binom{60}{5} = \frac{60!}{(60-5)!5!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot \cancel{55!}}{\cancel{55!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5461512$$

Estos valores pueden obtenerse de manera muy sencilla utilizando la función `choose()` en

R mediante:

$$\binom{50}{5} = \texttt{choose(50,5)} = 2118760$$
$$\binom{60}{5} = \texttt{choose(60,5)} = 5461512$$

La probabilidad pedida es entonces:

$$P\left(5\,\text{Hembras}\right) = \frac{\text{Num. de Casos Favorables}}{\text{Num. de Casos Posibles}} = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}} = 0{,}38794$$

b) Que haya exactamente 1 macho implica que los otros 4 ejemplares han de ser hembras. En este caso, para aplicar la regla de Laplace, el número de casos favorables puede calcularse como $n_{1M} \cdot n_{4H}$, siendo:

- n_{1M}= Número de formas de elegir 1 macho entre 10 $= \binom{10}{1} = 10$
- n_{4H}: Número de formas de elegir 4 hembras entre 50 $= \binom{50}{4} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot \cancel{46!}}{\cancel{46!}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 230300.$

Así pues, la probabilidad de extraer 1 macho y 4 hembras es:

$$P\left(1M, 4H\right) = \frac{\binom{10}{1}\binom{50}{4}}{\binom{60}{5}} = \frac{10\cdot 230300}{5461512} = 0{,}42168$$

c) Que haya al menos un macho es lo contrario de que no haya ningún macho entre los 5 ejemplares extraídos:

$$P\left(\text{al menos 1 Macho}\right) = 1 - P\left(0\,\text{Machos}\right) = 1 - P\left(5\,\text{Hembras}\right) = 1 - \frac{\binom{50}{5}}{\binom{60}{5}} = 0{,}61206$$

d) Debemos determinar el menor valor n de tortugas extraídas del terrario de tal forma que:

$$P\left(\text{al menos 1 Macho}\right) = 1 - P\left(0\,\text{Machos}\right) = 1 - P\left(n\,\text{Hembras}\right) = 1 - \frac{\binom{50}{n}}{\binom{60}{n}} \geq 0{,}20$$

Vamos dando valores a n:

- $n = 1$: $1 - \frac{\binom{50}{1}}{\binom{60}{1}} = 1 - \frac{50}{60} = \frac{1}{6} = 0{,}16667$
- $n = 2$: $1 - \frac{\binom{50}{2}}{\binom{60}{2}} = 1 - \frac{\texttt{choose(50,2)}}{\texttt{choose(60,2)}} = 1 - \frac{1225}{1770} = 0{,}30791$

Por tanto el número mínimo de tortugas a extraer es 2.

3. Se tira sucesivas veces una moneda hasta que sale cruz. Calcular la probabilidad de que (a) salga cruz en la primera tirada. (b) salga cruz en la décima tirada. (c) salga cruz después de la décima tirada.

Solución:

a) Si la moneda está equilibrada, la probabilidad de que salga cruz en la primera tirada es simplemente:

$$P(+) = \frac{1}{2}$$

b) Para que salga cruz en la décima tirada, han debido ocurrir caras en los nueve primeros lanzamientos. Si llamamos $X =$"*Nº del lanzamiento en que sale la primera cruz*" y tenemos en cuenta que los resultados de los sucesivos lanzamientos son independientes, se tiene:

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap +) = \\ &= P(C) \cdot P(C) \cdot \cdots \cdot P(C) \cdot P(+) = P(C)^9 P(+) \end{aligned}$$

c) Para que la primera cruz ocurra después de la décima tirada debe ocurrir que los diez primeros lanzamientos resulten en cara. Por tanto:

$$P(X > 10) = P(C) P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C) = P(C)^{10}$$

También podíamos haber argumentado que $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10} P(X = k)$. Ahora bien, como $P(X = k) = P(C)^{k-1} P(+)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{10} P(C)^{k-1} P(+) = P(+) \sum_{k=0}^{9} P(C)^k = \\ &= P(+) \frac{1 - P(C)^{10}}{1 - P(C)} = 1 - P(C)^{10} \end{aligned}$$

(hemos utilizado que $1 - P(C) = P(+)$, por lo que el numerador y denominador de la última expresión se cancelan). Por tanto:

$$P(X > 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10} P(X = k) = 1 - \left(1 - P(C)^{10}\right) = P(C)^{10}$$

Nota: Para calcular la suma $\sum_{k=0}^{9} P(C)^k$ hemos utilizado que la suma de los n primeros términos de una serie geométrica $1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^n$ es

$$\sum_{k=0}^{n} \rho^k = \frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho}$$

Puede verse la demostración, por ejemplo, en Wikipedia (http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_geom%C3%A9trica).

4. Se lanzan dos dados. (a) Hallar la probabilidad de que su suma sea par si se lanzan ambos dados a la vez. (b) Idem si se lanzan sucesivamente, y en el primer dado ha salido un número

par. (c) ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un dos si se sabe que la suma de ambos es par?

Solución:

a) Hay varias formas de resolver el problema. Una primera forma es considerando todos los posibles resultados del lanzamiento. Si denotamos como (i,j) el par ordenado que indica el resultado obtenido en cada dado, el espacio muestral asociado al lanzamiento es:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &\quad (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &\quad \ldots \\ &\quad (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

Este espacio muestral tiene 36 elementos, de los cuales 18 producen una suma par. Por tanto, utilizando la regla de Laplace:

$$P\left(Suma\,Par\right)=\frac{Casos\,Favorables}{Casos\,Posibles}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

Otra forma de resolver el problema es considerar que, para que la suma sea par, los resultados de los dados deben ser ambos pares o ambos impares; como el resultado de cada dado es independiente del otro:

$$\begin{aligned} P\left(Suma\,Par\right) &= P\left(Par\cap Par\right)+P\left(Impar\cap Impar\right)= \\ &= P\left(Par\right)\cdot P\left(Par\right)+P\left(Impar\right)\cdot P\left(Impar\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Utilizamos el concepto de probabilidad condicionada:

$$\begin{aligned} P\left(Suma\,Par\,|Dado_1=Par\right) &= \frac{P\left(Suma\,Par\cap Dado_1=Par\right)}{P\left(Dado_1=Par\right)}= \\ &= \frac{P\left(Dado_2=Par\cap Dado_1=Par\right)}{P\left(Dado_1=Par\right)}= \\ &= \frac{P\left(Dado_2=Par\right)\cdot P\left(Dado_1=Par\right)}{P\left(Dado_1=Par\right)}= \\ &= P\left(Dado_2=Par\right)=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En realidad la solución es directa sin más que observar que si el dado 1 da par, la única forma de que la suma sea par es que el dado 2 también dé par, suceso cuya probabilidad es $1/2$.

c) Consideremos los sucesos:

"Obtener suma par":

$$S_P = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\\ (4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

"Ha salido un 2 en uno de los dados":

$$H_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

"Obtener suma par y que haya salido un 2 en uno de los dados:

$$S_p \cap H_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(6,2)\}$$

Podemos resolver el problema de varias formas:

1. Directamente, utilizando la regla de Laplace: si sabemos que la suma es par, sólo son posibles los 18 casos de S_P; de estos 18 sólo hay 5 favorables (los casos de H_2) a que haya salido un 2. Por tanto:

$$P(H_2 | S_p) = \frac{Casos\,Favorables}{Casos\,Posibles} = \frac{5}{18}$$

2. Considerando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(H_2 | S_p) = \frac{P(H_2 \cap S_p)}{P(S_p)} = \frac{5/36}{18/36} = \frac{5}{18}$$

3. Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(H_2 | S_p) = \frac{P(S_p | H_2)\, P(H_2)}{P(S_p)} = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}$$

5. Una máquina fabrica piezas para motores de barco. La probabilidad de que una pieza resulte defectuosa es de 0.005. Estas piezas se venden en lotes de 100. En el control de calidad de la empresa se rechazan los lotes que contienen dos o más piezas defectuosas. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote elegido al azar sea rechazado? (b) Se han fabricado 100 lotes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos sean rechazados en el control de calidad?

Solución:

a) Sea $X =$*"Número de piezas defectuosas en un lote de 100"*. La probabilidad de que un lote sea rechazado es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Para calcular estas probabilidades, denotemos por D_i al suceso consistente en que la pieza $i-$ésima sea defectuosa, y por $\overline{D_i}$ a su contrario, que la pieza esté en buenas condiciones. Considerando que las distintas piezas son independientes entre sí (el hecho de que una sea defectuosa no informa sobre si las demás son defectuosas o no), se tiene:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\text{Ninguna pieza defectuosa}) = P\left(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \cdots \cap \overline{D}_{100}\right) = \\ &= P\left(\overline{D}_1\right) P\left(\overline{D}_2\right) \ldots P\left(\overline{D}_{100}\right) = (1 - 0{,}005)^{100} = 0{,}995^{100} = 0{,}60577 \end{aligned}$$

(Nota: el valor $0{,}995^{100}$ puede calcularse utilizando las propiedades de los logaritmos $0{,}995^{100} = e^{100log(0{,}995))}$).

Asimismo, la probabilidad de que haya una única pieza defectuosa puede calcularse como:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\text{Una pieza defectuosa}) = P\left(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3 \cap \cdots \cap \overline{D}_{100}\right) + \\ &\quad + P\left(\overline{D}_1 \cap D_2 \cap \overline{D}_3 \cap \cdots \cap \overline{D}_{100}\right) + \cdots + P\left(\overline{D}_1 \cap \cdots \cap \overline{D}_{99} \cap D_{100}\right) \end{aligned}$$

Obsérvesse que hemos tenido que considerar todas las formas en que puede haber una única defectuosa: que sea defectuosa la primera y las demás estén bien; que sea defectuosa la segunda y las demás estén bien; y así hasta que sea defectuosa la número 100 y las demás estén bien. Teniendo en cuenta ahora la independencia y que la probabilidad de ser defectuosa es la misma para todas las piezas, la expresión anterior es igual a:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(D)(1 - P(D))^{99} + P(D)(1 - P(D))^{99} + \cdots + P(D)(1 - P(D))^{99} = \\ &= 100P(D)(1 - P(D))^{99} = 100 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995^{100} = 0{,}30441 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}60577 - 0{,}30441 = 0{,}089822$$

b) Llamemos $Y =$"*Nº de lotes rechazados en el control de calidad*". Procediendo de modo análogo al apartado anterior, hemos de calcular:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)]$$

teniendo en cuenta ahora que la probabilidad de que un lote sea rechazado es $P(R) = P(X \geq 2) = 0{,}089822$. Entonces:

$$P(Y = 0) = (1 - P(R))^{100} = (1 - 0{,}089822)^{100} = 0{,}00008177$$

Asimismo:

$$P(Y = 1) = 100P(R)(1 - P(R))^{99} = 100 \cdot 0{,}089822 \cdot 0{,}91018^{99} = 0{,}00080701$$

Así pues, $P(Y \geq 2) = 1 - 0{,}00008177 - 0{,}00080701 = 0{,}99911$.

Era de esperar que esta probabilidad fuese alta: como la probabilidad de rechazar un lote es 0.089822, la proporción de lotes rechazados será del 8.9822 %; o lo que es lo mismo, de cada 100 lotes cabe esperar que se rechacen aproximadamente 9, y por tanto es muy probable que se rechacen más de 2.

6. Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen 6 bolas. Calcular la probabilidad de que (a) salgan todas negras. (b) salgan todas blancas (c) salgan tres negras y tres blancas (d) salga al menos una blanca (e) salga al menos una negra (f) salga al menos una negra si ya han salido dos blancas. Responder a estas seis preguntas en cada uno de los dos casos siguientes: (1) las cinco bolas se extraen simultáneamente (muestreo sin reemplazamiento) (2) las bolas se van sacando de una en una, siendo cada vez devueltas a la bolsa (muestreo con reemplazamiento).

Solución:

Llamemos X_N =*"Número de bolas negras extraídas de la urna"* y X_B =*"Número de bolas blancas extraídas de la urna"*

1. **Si el muestreo se realiza sin reemplazamiento** (se sacan las 5 bolas a la vez, o una a una sin devolverlas a la urna):

   a) Dado que en la urna sólo hay 5 bolas negras y las extracciones se realizan sin reemplazamiento, es obviamente imposible extraer 6 bolas negras. Por tanto

   $$P(X_N = 6) = 0$$

   b) Podemos resolver el problema considerando que cada resultado condiciona al siguiente: sea B_k el suceso consistente en sacar bola blanca en la $k-$ésima extracción. Entonces:

   $$\begin{aligned} P(X_B = 6) &= P(B_1) \cdot P(B_2 \,|B_1) \cdot P(B_3 \,|B_1 \cap B_2) \cdot P(B \,|B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cdot \\ &\quad \cdot P(B_5 \,|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \cdot P(B_6 \,|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = \\ &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}041958 \end{aligned}$$

   (en la primera extracción hay 10 bolas blancas y un total de 15 en la urna; si la primera vez se ha sacado blanca, en la segunda extracción ya sólo quedan 9 blancas entre un total de 14 bolas; si se han sacado 2 blancas en las dos primeras extracciones, en la tercera extracción quedan 8 blancas entre un total de 13 bolas; etc.).

   También podemos resolver el problema utilizando la regla de Laplace; los casos favorables son todas las formas de sacar 6 bolas blancas de entre las 10 que hay en la urna, sin que importe el orden; hay por tanto $\binom{10}{6} = \frac{10!}{(10-6)!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ casos favorables. Los casos posibles son todas las formas de sacar 6 bolas de entre las 15 que hay en la urna; en total hay $\binom{15}{6} = \frac{15!}{(15-6)!6!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5005$ casos posibles. Por tanto:

$$P(X_B = 6) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 0{,}041958$$

c) Procedemos de modo análogo al apartado anterior. Ahora para calcular el número de casos favorables hemos de considerar todas las formas de extraer 3 bolas negras de entre las 5 que hay en la urna (en total $\binom{5}{3} = 10$ formas), y 3 bolas blancas de entre las 10 que también hay en la urna (en total $\binom{10}{3} = 120$ formas). Como cada combinación de negras, puede ir acompañada de cualquier combinación de blancas, el número total de casos favorables será $\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{3} = 1200$. Por tanto:

$$P(X_N = 3) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{6}} = \frac{1200}{5005} = 0{,}23976$$

d) Dado que en la urna sólo hay 5 negras y se sacan 6 bolas, es seguro que siempre saldrá al menos una blanca. Por tanto

$$P(X_B \geq 1) = 1$$

e) Para calcular la probabilidad de que salga al menos una negra basta tener en cuenta que:

$$P(X_N \geq 1) = 1 - P(X_N = 0) = 1 - P(X_B = 6) = 1 - \frac{\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}} = 1 - 0{,}041958 = 0{,}95804$$

f) Si ya han salido dos blancas, ello significa que en las 6 extracciones como mucho podrán salir 4 negras. Por tanto:

$$\begin{aligned} P(X_N \geq 1 \,|X_B \geq 2) &= P(X_N \geq 1 \,|X_N \leq 4) = \frac{P(X_N \geq 1 \cap X_N \leq 4)}{P(X_N \leq 4)} = \\ &= \frac{P(1 \leq X_N \leq 4)}{P(X_N \leq 4)} = \frac{1 - (P(X_N = 0) + P(X_N = 5))}{1 - P(X_N = 5)} \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$P(X_N = 0) = P(X_B = 6) = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}} = 0{,}041958$$

$$P(X_N = 5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{10}{1}}{\binom{15}{6}} = 0{,}001998$$

Por tanto:

$$P(X_N \geq 1 \,|X_B \geq 2) = \frac{1 - 0{,}041958 - 0{,}001998}{1 - 0{,}001998} = 0{,}95796$$

2. **Si el muestreo se realiza con reemplazamiento** (se saca cada bola, se anota su color y se devuelve a la urna):

a) Dado que cada bola se devuelve a la urna, en cada extracción la composición de la urna es siempre la misma (5 bolas negras y 10 blancas), por lo que el resultado de una extracción no informa sobre el resultado de la siguiente. Las extraccciones son, pues, independientes. Llamando N al suceso "*Sacar bola negra*", se tiene que $P(N) = \frac{5}{15} = 0{,}33333$. Entonces:

$$P(X_N = 6) = P(N \cap N \cap N \cap N \cap N \cap N) = P(N)^6 = 0{,}0013717$$

b) Procedemos de modo análogo al apartado anterior. Ahora $P(B) = \frac{10}{15} = 0{,}66667$, y:

$$P(X_B = 6) = P(B \cap B \cap B \cap B \cap B \cap B) = P(B)^6 = 0{,}087791$$

c) Para calcular la probabilidad de tres blancas y tres negras hemos de considerar que este suceso puede producirse de muchas formas: $BBBNNN$, $NNNBBB$, $BNBNBN$, $NBNBNB$, $NBBNBN, \ldots$ Desde el punto de vista del resultado que anotamos (han salido 3 blancas y 3 negras) todos estos resultados son equivalentes ya que el orden en que salen las bolas es irrelevante; pero como lo cierto es que todos esos resultados pueden producirse en la práctica, hay que contabilizarlos. Podemos realizar este recuento de dos formas (que obviamente producen el mismo resultado):

- Considerando que son todas las formas en que se pueden ordenar 6 letras entre las que hay sólo dos distintas, una que se repite tres veces (la B) y otra que se repite otras tres veces (la N). En total $PR_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$.
- Considerando que tenemos 6 posiciones, de entre las que hemos de elegir 3 para colocar letras B (en las tres posiciones desocupadas se colocarían letras N). Las formas de elegir 3 posiciones entre 6 son $C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

Cada uno de los posibles resultados tiene la misma probabilidad de ocurrir; por ejemplo, $P(NNNBBB) = P(N \cap N \cap N \cap B \cap B \cap B) = P(N)^3 P(B)^3$; como hay en total $\binom{6}{3}$ posibles resultados, la probabilidad total de sacar 3 negras (y 3 blancas) será, en definitiva:

$$P(X_N = 3) = \binom{6}{3} P(N)^3 P(B)^3 = 20 \cdot 0{,}33333^3 0{,}66667^3 = 0{,}21948$$

d) La probabilidad de que salga al menos una blanca puede calcularse como:

$$P(X_B \geq 1) = 1 - P(X_B = 0) = 1 - P(N \cap N \cap N \cap N \cap N \cap N) = 1 - P(N)^6 = 0{,}99863$$

e) Análogamente, la probabilidad de que salga al menos una negra es:

$$P(X_N \geq 1) = 1 - P(X_N = 0) = 1 - P(B \cap B \cap B \cap B \cap B \cap B) = 1 - P(B)^6 = 0{,}91221$$

f) En este caso:

$$\begin{aligned} P\left(X_N \geq 1 \,|X_B \geq 2\right) &= P\left(X_N \geq 1 \,|X_N \leq 4\right) = \frac{P\left(X_N \geq 1 \cap X_N \leq 4\right)}{P\left(X_N \leq 4\right)} = \\ &= \frac{P\left(1 \leq X_N \leq 4\right)}{P\left(X_N \leq 4\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{4} P\left(X_N = k\right)}{\sum_{k=0}^{4} P\left(X_N = k\right)} \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} &P\left(X_N = 0\right) = P\left(B\right)^6 = 0{,}087791 \\ &P\left(X_N = 1\right) = \tbinom{6}{1} P\left(N\right) P\left(B\right)^5 = 0{,}26337 \\ &P\left(X_N = 2\right) = \tbinom{6}{2} P\left(N\right)^2 P\left(B\right)^4 = 0{,}32922 \\ &P\left(X_N = 3\right) = \tbinom{6}{3} P\left(N\right)^3 P\left(B\right)^3 = 0{,}21948 \\ &P\left(X_N = 4\right) = \tbinom{6}{4} P\left(N\right)^4 P\left(B\right)^2 = 0{,}082305 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P\left(X_N \geq 1 \,|X_B \geq 2\right) = \frac{0{,}89438}{0{,}98217} = 0{,}91061$$

7. Un examen consta de 10 preguntas, en cada una de las cuales hay que responder a, b o c. Cada pregunta bien contestada vale un punto y se aprueba con una calificación de, al menos, cinco puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que elige cada respuesta al azar apruebe el examen?

Solución:

Si las respuestas se eligen al azar, la probabilidad de contestar correctamente a cada pregunta es $1/3$ (y por tanto la probabilidad de contestar incorrectamente es $2/3$). Si X es el número de preguntas bien contestadas en el examen, la probabilidad de aprobar es $P\left(X \geq 5\right) = P\left(X = 5\right) + P\left(X = 6\right) + P\left(X = 7\right) + P\left(X = 8\right) + P\left(X = 9\right) + P\left(X = 10\right)$.

Ahora bien, si el número de preguntas bien contestadas es $X = k$, ello implica que las restantes $10 - k$ preguntas han de estar mal respondidas; dado que las preguntas se contestan independientemente unas de otras, la probabilidad de contestar, por ejemplo, las k primeras bien y las $10 - k$ últimas mal es $(1/3)^k\,(2/3)^{10-k}$. Esta probabilidad será la misma cualquiera que sea el grupo de k preguntas que se han contestado bien (las k primeras, las k últimas, k de enmedio...). Por tanto, para calcular la probabilidad total de contestar bien k preguntas hay que sumar la probabilidad anterior tantas veces como formas hay de elegir k preguntas entre las 10, esto es $\binom{10}{k}$, esto es:

$$P\left(X = k\right) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$$

Si bien el cálculo de estas probabilidades a mano o con calculadora resulta algo costoso, con R el cálculo es inmediato; basta utilizar la función `dbinom(k,n,p)` definida en R como:

$$P\left(X=k\right)=\texttt{dbinom(k,n,p)}=\binom{n}{k}p^k\left(n-p\right)^{n-k}$$

(el nombre `dbinom` hace referencia a que esta asignación de probabilidades se conoce con el nombre de *distribución binomial*; de hecho muchos de los problemas anteriores utilizan probabilidades de esta forma). En este caso:

$P\left(X=5\right)$=`dbinom(5,10,1/3)`=0.13656	$P\left(X=8\right)$=`dbinom(8,10,1/3)`=0.0030483
$P\left(X=6\right)$=`dbinom(6,10,1/3)`=0.056902	$P\left(X=9\right)$=`dbinom(9,10,1/3)`=0.0003387
$P\left(X=7\right)$=`dbinom(7,10,1/3)`=0.016258	$P\left(X=10\right)$=`dbinom(10,10,1/3)`=1.6935e-05

Asimismo, la probabilidad total $P\left(X\geq 5\right)$ puede calcularse también muy fácilmente mediante:

$$P\left(X\geq 5\right)=\sum_{k=5}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}=\texttt{sum(dbinom(5:10,10,1/3))}=0{,}21313$$

8. Una puerta tiene dos cerraduras distintas. Se dispone de seis llaves semejantes entre las que se encuentran las dos que abren la puerta. ¿Cuál es la probabilidad de abrir la puerta con las dos primeras llaves que se prueben? Si se pierde una llave de las seis ¿cuál es la probabilidad de que aún se pueda abrir la puerta?

Solución:

Si denotamos por (C_1, C_2) al par ordenado que indica qué llave se introduce en la cerradura 1 y qué llave se introduce en la 2, el espacio muestral de todos los sucesos posibles sería:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &\quad (3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),\\ &\quad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}\end{aligned}$$

esto es, el conjunto de todas las variaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2; este conjunto contiene $V_6^2=\frac{6!}{(6-2)!}=30$ posibilidades. Por tanto, la probabilidad de abrir la puerta al primer intento será:

$$P\left(\text{Abrir a la primera}\right)=\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}}=\frac{1}{30}=0{,}033333$$

Si se pierde una llave de las seis, la probabilidad de que aún se pueda abrir la puerta coincide con la probabilidad de que no se pierda ninguna de las dos llaves de las cerraduras de la puerta; o lo que es lo mismo, que se pierda alguna de las otras cuatro llaves. Por tanto, dicha probabilidad es:

$$p=\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}}=\frac{4}{6}=0{,}66667$$

9. Un químico asegura haber ideado un análisis para identificar cuatro compuestos químicos A, B, C y D cuando éstos se hallan disueltos en agua. A este químico se le entregan cuatro probetas cada una de las cuales contiene uno de dichos compuestos en disolución. Supongamos que realmente el análisis no funciona y que los compuestos sólo son identificados por casualidad. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente los cuatro compuestos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que identifique 2? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que identifique sólo uno? (d) ¿Cuál es la probabilidad de que no identifique ninguno.

Solución:

a) Sea X el número de compuestos correctamente identificados y llamemos I_k al suceso consistente en identificar correctamente el compuesto de la probeta k. Si cada identificación se realiza al azar, y suponemos que las sucesivas identificaciones son independientes, la probabilidad de realizar cuatro identificaciones correctas será:

$$P(X=4) = P(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4) = P(I_1)\,P(I_2)\,P(I_3)\,P(I_4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0{,}0039062$$

b) La identificación correcta de dos compuestos puede llevarse a cabo de varias formas: $I_1 \cap I_2 \cap \overline{I}_3 \cap \overline{I}_4$, $I_1 \cap \overline{I}_2 \cap I_3 \cap \overline{I}_4$, $\overline{I}_1 \cap I_2 \cap \overline{I}_3 \cap I_4$, etc. Cada una de estas formas tiene la misma probabilidad de ocurrir; por ejemplo, $P\left(I_1 \cap I_2 \cap \overline{I}_3 \cap \overline{I}_4\right) = P(I)^2\,P\left(\overline{I}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$. En total hay $\binom{4}{2}$ formas de identificar correctamente 2 de 4 compuestos. Por tanto la probabilidad total de identificar correctamente dos compuestos es:

$$P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \texttt{dbinom(2,4,1/4)} = 0{,}21094$$

c) De modo análogo:

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \texttt{dbinom(1,4,1/4)} = 0{,}42188$$

d) La probabilidad de no identificar ninguno es:

$$P(X=0) = P\left(\overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 \cap \overline{I}_3 \cap \overline{I}_4\right) = P\left(\overline{I}_1\right)P\left(\overline{I}_2\right)P\left(\overline{I}_3\right)P\left(\overline{I}_4\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0{,}31641$$

o también:

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \texttt{dbinom(0,4,1/4)} = 0{,}31641$$

10. En el juego de la lotería primitiva cada apostante elige 6 números distintos del 1 al 49. Cuan-

do se celebra el sorteo, se sacan 6 bolas de un bombo donde hay 49 bolas numeradas del 1 al 49. Estas seis bolas constituyen la combinación ganadora. A continuación se saca una séptima bola (número complementario). Todas las extracciones son sin reemplazamiento (las bolas extraídas no se devuelven al bombo) (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un apostante que juega una única apuesta acierte la combinación ganadora? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte cinco números de la combinación ganadora y además acierte el número complementario? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte cinco números de la combinación ganadora y no acierte el complementario? (d) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4 números de la combinación ganadora? (e) ¿y que acierte 3?

Solución:

Podemos resolver los distintos apartados de este problema mediante la regla de Laplace, contando en cada ocasión el número de casos favorables. El número de casos posibles son todas las formas de elegir 6 números entre 49, sin que importe el orden y sin que puedan repetirse, esto es $\binom{49}{6}$ =`choose(49,6)`=13983816

a) Sea X el número de aciertos. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(X=6)=\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}}=\frac{1}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{13983816}=0{,}0000000715$$

b) Hay $\binom{6}{5}$ formas de acertar 5 números de entre los 6 de la combinación ganadora. Por cada una de estas formas hay una sóla manera de acertar el complementario (que el sexto número de la apuesta coincida con el complementario). Por tanto:

$$P(X=5+C)=\frac{\binom{6}{5}}{\binom{49}{6}}=\frac{\texttt{choose(6,5)}}{\texttt{choose(49,6)}}=\frac{6}{13983816}=0{,}000000429$$

c) Se tienen sólo cinco aciertos cuando el apostante ha marcado 5 de los 6 números de la combinación ganadora (cosa que puede hacer de $\binom{6}{5}$ formas) y alguno de los 42 que no son los 6 de la combinación ganadora ni el complementario. Por tanto:

$$P(X=5)=\frac{\binom{6}{5}\cdot 42}{\binom{49}{6}}=\frac{6\cdot 42}{13983816}=0{,}000018021$$

d) Para tener cuatro aciertos, el apostante debe haber marcado 4 números de entre los 6 de la combinación ganadora y 2 de entre los 43 números restantes. Por tanto:

$$P(X=4)=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=\frac{15\cdot 903}{13983816}=0{,}000968620$$

e) De modo análogo, para tener tres aciertos, el apostante debe haber marcado 3 números de entre los 6 de la combinación ganadora y 3 de entre los 43 números restantes. Por tanto:

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}=\frac{20\cdot 12341}{13983816}=0{,}017650404$$

De la dirección http://dl.dropbox.com/u/7610774/Datos/primitiva.csv puede descargarse un archivo con los resultados de los sorteos de la lotería primitiva desde su comienzo, el 17 de octubre de 1985, hasta el 17 de marzo de 2011 (2476 sorteos y algo más de cincuenta y tres mil millones de apuestas). Dicho archivo contiene, para cada sorteo, la combinación ganadora, el número de apuestas realizadas y el número de premios de cada categoría. El siguiente código R permite leer dicho archivo y calcular la proporción de acertantes de cada categoría a lo largo de la historia del sorteo. Puede comprobarse que las proporciones se aproximan mucho a las probabilidades que hemos calculado en este ejercicio.

```
# Lectura de los datos
# --------------------
primitiva=read.csv2("http://dl.dropbox.com/u/7610774/Datos/primitiva.csv")
#
# Cálculo del total de apuestas y total de acertantes en cada categoría
# ---------------------------------------------------------------------
attach(primitiva)
totalApuestas=sum(as.numeric(apuestas))
n6A=sum(acertantes_1)
n5AyC=sum(acertantes_2)
n5A=sum(acertantes_3)
n4A=sum(acertantes_4)
n3A=sum(acertantes_5)
detach(primitiva)
#
# Proporciones observadas de acertantes de cada categoría
# -------------------------------------------------------
p6A=n6A/totalApuestas
p5AyC=n5AyC/totalApuestas
p5A=n5A/totalApuestas
p4A=n4A/totalApuestas
p3A=n3A/totalApuestas
#
# Probabilidades teóricas
# -----------------------
pt6A=1/choose(49,6)
pt5AyC=6/choose(49,6)
pt5A=choose(6,5)*42/choose(49,6)
pt4A=choose(6,4)*choose(43,2)/choose(49,6)
```

```
pt3A=choose(6,3)*choose(43,3)/choose(49,6)
#
# Presentación de los resultados
# ------------------------------
proporcion=c(p6A,p5AyC,p5A,p4A,p3A)
probabilidad=c(pt6A,pt5AyC,pt5A,pt4A,pt3A)
resultados=format(data.frame(proporcion,probabilidad),
        digits=3,scientific=F)
rownames(resultados)=c("6 Aciertos","5 Ac.+Comp.","5 Aciertos",
        "4 Aciertos","3 Aciertos")
resultados
```

```
             proporcion probabilidad
6 Aciertos  0.0000000729 0.0000000715
5 Ac.+Comp. 0.0000004284 0.0000004291
5 Aciertos  0.0000179973 0.0000180208
4 Aciertos  0.0009692190 0.0009686197
3 Aciertos  0.0175711017 0.0176504039
```